LA2 – cvičení 4 – 2022-03-09

Tahák

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *ortogonální*, pokud $Q^{\mathrm{T}}Q = I_n$.
  (Vlastně je ortonormální, ale neříká se to.)
- Pak platí $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ a $\|Qx\| = x$ pro *standardní* skalární součin.
- V komplexním případě potřebujeme *unitární* matice: $A^*A = I_n$, kde $A^* = \overline{A^{\mathrm{T}}}$ je *konjugovaná transpozice.*
- Pokud soustava $Ax = b$ nemá řešení, $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ je nejlepší aproximace.

Ortogonální matice

1. Nechť P a Q jsou ortogonální matice. Rozhodněte, které operace dávají opět ortogonální matice:
   a) $P + Q$
   b) PQ
   c) P^{-1}
   d) $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

2. Pro permutaci $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ definujeme *permutační matici* $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $P_{ij} = 1$ pro $j = \pi(i)$ a všude jinde jsou nuly. Dokažte:
   a) Permutační jsou právě ty nula-jedničkové matice, které mají v každém řádku a každém sloupci právě jednu jedničku.
   b) Permutační matice jsou ortogonální.
   c) Součin permutačních matic je zase permutační. Jaká je to permutace?
   d) Inverze permutační matice je zase permutační. Jaká je to permutace?
   e) Jakou úpravu na matici A vykoná AP?
   f) Jakou úpravu na matici A vykoná PA?

3. Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

4. *Householderova matice* $H(u) = I_n - \frac{2uu^{\mathrm{T}}}{u^{\mathrm{T}}u}$ reprezentuje zrcadlení v $\mathbb{R}^n$ podle nadroviny kolmé na vektor $u \neq o$.
   a) Dokažte, že každá $H(u)$ je symetrická.
   b) Dokažte, že každá $H(u)$ je ortogonální.
   c) Rozhodněte, zda existuje vektor $u \neq o$ takový, že $H(u) = I_n$.

Metoda nejmenších čtverců

5. Spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$ pro $A = (1, 2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $b = (5, 5, 5, 5)^{\mathrm{T}}$.

6. Spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$ pro $A = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ a $b \in \mathbb{R}^n$.

7. Co vyjde z metody nejmenších čtverců, pokud $Ax = b$ má řešení?