LA2 – cvičení 3 – 2022-03-02

Tahák

- *Ortogonální doplněk* množiny $U \subseteq V$: $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U : u \perp v\}$.
  - $U^\perp$ je vždy podprostor.
- Pro $U \Subset V$: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$, $U + U^\perp = V$, $U^{\perp\perp} = U$.
  - $U^\perp$ můžeme najít doplněním ortonorm. báze U na ortonorm. bázi V.
  - Pokud $U = \mathcal{R}(A)$, pak $U^\perp = \ker A$.
- Čtyři základní prostory matice A tvaru $n \times m$:
  - *řádkový prostor* $\mathcal{R}(A)$ dimenze $r = \operatorname{rank} A$
  - *sloupcový prostor* $\mathcal{S}(A) = \mathcal{R}(A^\mathrm{T})$ dimenze r
  - *nulový prostor* $\mathcal{N}(A) = \ker A = \mathcal{R}(A)^\perp$ dimenze $n - r$
  - *levý nulový prostor* $\mathcal{N}(A^\mathrm{T}) = \mathcal{S}(A)^\perp$ dimenze $m - r$
- *Projekce* x do $U \subseteq V$ je $x_U \in U$, který minimalizuje $\|x - x_U\|$.
  - Pro ortonormalní bázi $z_1, \ldots, z_k$ prostoru U: $x_U = \sum_i \langle x, z_i \rangle z_i$.
  - Pokud sloupce A jsou bází U: $x_U = A(A^\mathrm{T}A)^{-1}A^\mathrm{T}x$.
  - Obojí určuje lineární zobrazení $x \mapsto Px$ pro P symetrickou a $P^2 = P$.

Ortogonální doplněk

1. Pro prostor V určete $V^\perp$, $\{o\}^\perp$, $\emptyset^\perp$.
2. V $\mathbb{R}^4$ najděte $U^\perp$ pro $U = \operatorname{span}\{(1,0,0,0)^\mathrm{T}, (0,1,0,0)^\mathrm{T}\}$.
3. V $\mathbb{R}^4$ najděte $U^\perp$ pro $U = \operatorname{span}\{(1,2,0,-2)^\mathrm{T}, (1,3,1,-1)^\mathrm{T}\}$.
4. Pro matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
najděte čtyři základní prostory a zakreslete je do obrázku.

Projekce na přímku

5. Dokažte, že projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ do přímky $Z = \operatorname{span}\{z\}$ splňuje:
$$x_Z = \frac{\langle x, z \rangle}{\langle z, z \rangle} z = \frac{x^\mathrm{T} z}{z^\mathrm{T} z} z.$$
Nápověda: Nejdřív uvažte případ $\|z\| = 1$.
6. Promítněte vektor $(2,4)^\mathrm{T}$ na přímku $\operatorname{span}\{(1,3)\}$. Jaká je jeho vzdálenost od přímky?
7. Jak vypadá matice projekce na přímku $\operatorname{span}\{(1,2,3)\}$? Jaké jsou její 4 základní prostory?
8. Jaká je vzdálenost bodu $X = (5,3,6)^\mathrm{T}$ od přímky procházející body $A = (1,1,1)^\mathrm{T}$ a $B = (2,3,3)^\mathrm{T}$?
9. Zapište překlopení vektoru x podle přímky $\operatorname{span}\{z\}$. Jaká je jeho matice?

Projekce do podprostoru

10. Rozložte $u = (3, 2, 6)^{\mathrm{T}}$ na součet $v + w$, kde $v \in V = \mathrm{span}\{(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}\}$ a $w \in V^{\perp}$.

11. Jak vypadá matice projekce do prostoru $\mathcal{S}(A)$, pokud sloupce A jsou ortonormální? (Vzorec z přednášky se zjednoduší.)

12. Najděte matici projekce do roviny $\mathrm{span}\{(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}\}$. Jaké jsou její 4 základní prostory?

13. Jak spočítat vzdálenost bodu x od roviny určené body A, B, C?

Zákusek

14. Buď S_{nn} prostor symetrických matic ($A^{\mathrm{T}} = A$) v $\mathbb{R}^{n \times n}$ a T_{nn} prostor antisymetrických matic ($A^{\mathrm{T}} = -A$) tamtéž.

    a) Dokažte, že $S_{nn}^{\perp} = T_{nn}$
    b) Dokažte, že projekce $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ do S_{nn} je rovna $\frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$.
    c) Jak vypadá projekce do A_{nn}?

15. Uvažujme vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýš n. Popište operátor derivace polynomu jako lineární zobrazení. Jaká mu odpovídá matice? Jaké jsou její 4 základní prostory a jejich dimenze?