

LA2 – cvičení 1 – 2022-02-16

Reálný skalární součin

1. Najděte vektory kolmý na $(3, 2)^T$:
 - a) alespoň jeden
 - b) všechny
 - c) všechny jednotkové
2. Určete úhel mezi vektory $(0, 0, 1)^T$ a $(1, 0, -1)^T$.
3. Určete úhel mezi tělesovou úhlopříčkou krychle a její podstavou.

Komplexní skalární součin

4. Spočítejte:
 - a) $(3 - 4i) + (1 + 2i)$
 - b) $(3 - 4i) \cdot (1 + 2i)$
 - c) $(3 - 4i)^2$
 - d) $(3 - 4i)/(1 + 2i)$
 - e) $|3 - 4i|$
5. Pro vektory $x = (2, 1, 4, -1)^T$ a $y = (4, -1, 0, 2)^T$ spočítejte:
 - a) $\langle x, y \rangle$
 - b) Jsou na sebe x a y kolmé?
 - c) $\|x\|, \|y\|$
 - d) vzdálenost x od y

Obecný skalární součin

6. Rozhodněte o následujících funkcích, jsou-li skalárními součiny v \mathbb{R}^2 :
 - a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$
 - b) $\langle x, y \rangle = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$
 - c) $\langle x, y \rangle = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)$
 - d) $\langle x, y \rangle = (x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2)$
 - e) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$
 - f) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$
 - g) $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

Norma

7. Pro normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_3$ a $\|x\|_\infty$ nakreslete jednotkovou kružnici.
8. Dokažte, že pro normu indukovanou skalárním součinem platí *rovnoběžníkové pravidlo*: $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
9. Rozhodněte, zda normy $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_3$ a $\|x\|_\infty$ jsou indukované skalárním součinem.

Metrika

10. Pro souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$ definujeme funkci $d : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $d(x, y)$ je délka nejkratší cesty z vrcholu x do vrcholu y . Je (V, d) metrický prostor? Změní se odpověď, pokud graf je orientovaný?
11. Jak dopadne předchozí cvičení pro graf, jehož hrany mají nezáporné reálné délky? A pokud mohou být délky i záporné?
12. Na množině všech n -bitových řetězců $\{0, 1\}^n$ definujeme *Hammingovu vzdálenost* $d(x, y)$ jako počet všech indexů i takových, že $x_i \neq y_i$. Je to metrika?