

Grafy

Pár definic pro začátek:

- Graf je k -regulární (pro nějaké $k \in \mathbb{N}$), pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň k .
- *Doplňek* grafu G je graf \overline{G} , který vznikne z G prohozením hran s nehranami. Tedy $\overline{G} = (V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$.
- *Automorfismus* grafu je isomorfismus s ním samým. Každý graf má aspoň jeden automorfismus (totiž identitu) a může mít i další. Grafu, který má jen jeden, říkáme *strnulý* nebo *asymetrický*.

Úkoly:

Pestrý graf – pest (9 bodů)

Pro která n existuje graf na n vrcholech, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně?

Skoro úplné grafy – skup (6 bodů)

Dokažte, že pro každé n jsou všechny $(n-2)$ -regulární grafy na n vrcholech navzájem isomorfní.

Doplňek kružnice – dokr (8 bodů)

Pro která n platí $C_n \simeq \overline{C_n}$, tedy že kružnice na n vrcholech je isomorfní se svým doplňkem?

Sám sobě doplňkem – selfc (12 bodů)

Najděte nekonečně mnoho grafů G , které jsou isomorfní se svým doplňkem.

Strnulec – strn (10 bodů)

Sestrojte strnulý graf, který má alespoň 2 vrcholy, a dokažte to o něm.

Graf bez cestičky – nop2 (4 body)

Popište všechny grafy, které neobsahují podgraf isomorfní s cestou P_2 (to je cesta o dvou hranách). Dostatečně zdůvodněte, proč jiné nemohou existovat.

Graf bez cesty – nop3 (6 bodů)

Popište všechny grafy, které neobsahují podgraf isomorfní s cestou P_3 (cesta o třech hranách). Dostatečně zdůvodněte, proč jiné nemohou existovat.