

4. Goldbergův algoritmus

Představíme si ještě jeden algoritmus pro hledání maximálního toku v síti. Bude daleko jednodušší než Dinicův algoritmus z předchozí kapitoly a po pár snadných úpravách bude mít stejnou nebo dokonce lepší časovou složitost. Jednoduchost algoritmu bude ale vykoupena trochu složitějším rozбором jeho správnosti a efektivity.

Vlny a přebytky

Značení z minulých kapitol, které se nám bude hodit:

- síť $S = (V, E, z, s, c)$: V je množina vrcholů, E množina hran, z zdroj, s spotřebič a c funkce udávající kapacitu hran.
- n udává počet vrcholů grafu, m počet jeho hran.
- $f^\Delta(v)$ je *přebytek* vrcholu v při ohodnocení hran funkcí f , tedy součet hodnot f na hranách vedoucích do v minus součet na hranách vedoucích z v ven.
- $r(uv) = c(uv) - f(uv) + f(vu)$ je *rezerva* hrany uv ; ta říká, kolik jednotek toku můžeme po této hraně ještě poslat, a to buď přičtením po směru hrany nebo odečtením proti směru. Hranám s kladnou rezervou říkáme *nenasyčené*, stejně říkáme cestám složeným ze samých takových hran.

Předchozí algoritmy začínaly s nulovým tokem a postupně ho zlepšovaly, až se stal maximálním. Goldbergův algoritmus naproti tomu začne s ohodnocením hran, které ani nemusí být tokem, a postupně ho upravuje a zmenšuje, až se z něj stane tok, a to dokonce maximální.

Definice: Funkce $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je *vlna* v síti S , splňuje-li obě následující podmínky:

- $\forall e \in E : f(e) \leq c(e)$ (vlna nepřekročí kapacity hran),
- $\forall v \in V \setminus \{z, s\} : f^\Delta(v) \geq 0$ (přebytek ve vrcholech je nezáporný).

Každý tok je tedy vlnou, ale opačně tomu tak být nemusí – potřebujeme se postupně zbavit nenulových přebytků ve všech vrcholech kromě zdroje a spotřebiče. K tomu nám bude sloužit následující operace:

Definice: *Převedení přebytku* po hraně uv , přičemž $f^\Delta(u) > 0$ a $r(uv) > 0$, provedeme tak, že po hraně uv pošleme $\delta = \min(f^\Delta(u), r(uv))$ jednotek toku, podobně jako v předchozích algoritmech buď přičtením po směru nebo odečtením proti směru.

Pozorování: Převedení změní přebytky a rezervy následovně:

$$\begin{aligned}f'^\Delta(u) &= f^\Delta(u) - \delta \\f'^\Delta(v) &= f^\Delta(v) + \delta \\r'(uv) &= r(uv) - \delta \\r'(vu) &= r(vu) + \delta\end{aligned}$$

Rádi bychom postupným převáděním všechny přebytky buď přepravili do spotřebiče nebo, pokud je vlna příliš velká, je přelili zpět do zdroje. Chceme se ovšem

vyhnout přelévání přebytků tam a zase zpět, takže vrcholům přiřadíme *výšky* – to budou nějaká přirozená čísla $h(v)$.

Přebytek pak budeme ochotni převádět pouze z vyššího vrcholu do nižšího. Pokud se stane, že nalezneme vrchol s přebytkem, ze kterého nevede žádná nenasyčená hrana směrem dolů, budeme tento vrchol *zvedat* – tedy zvyšovat mu výšku po jedné, než se dostane dostatečně vysoko, aby z něj přebytek mohl odtéci.

Získáme tak následující algoritmus:

Algoritmus GOLDBERG

Vstup: Síť.

1. Nastavíme počáteční výšky: (*zdroj ve výšce n , ostatní ve výšce 0*)
2. $h(z) \leftarrow n$
3. $h(v) \leftarrow 0$ pro všechny $v \neq z$
4. Vytvoříme počáteční vlnu: (*všechny hrany ze z na maximum, jinde 0*)
5. $f \leftarrow$ všude nulová funkce
6. $f(zv) \leftarrow c(zv)$, kdykoliv $zv \in E$
7. Dokud $\exists u \in V \setminus \{z, s\} : f^\Delta(u) > 0$:
8. Pokud $\exists v \in V : uv \in E, r(uv) > 0$ a $h(u) > h(v)$,
převéde přebytek po hraně uv .
9. V opačném případě *zvedneme u* : $h(u) \leftarrow h(u) + 1$.

Výstup: Maximální tok f .

Analýza algoritmu

Algoritmus je jednoduchý, ale na první pohled není vidět ani to, že se vždy zastaví, natož že by měl vydat maximální tok. Postupně o něm dokážeme několik invariantů a lemmat a pomocí nich se dobereme k důkazu správnosti a časové složitosti.

Invariant A (základní):

1. Funkce f je v každém kroku algoritmu vlna.
2. Výška $h(v)$ žádného vrcholu v nikdy neklesá.
3. $h(z) = n$ a $h(s) = 0$ po celou dobu běhu algoritmu.

Důkaz: Indukcí dle počtu průchodů cyklem (7. – 9. krok algoritmu):

- Po inicializaci algoritmu je vše v pořádku: přebytky všech vrcholů mimo zdroj jsou nezáporné, výšky souhlasí.
- Při převedení přebytku: Z definice převedení přímo plyne, že neporušuje kapacity a nevytváří záporné přebytky. Výšky se nemění.
- Při zvednutí vrcholu: Tehdy se naopak mění jen výšky, ale pouze u vrcholů různých od zdroje a stoku. Výšky navíc pouze rostou. ♡

Invariant S (o Spádu): Neexistuje hrana uv , která by měla kladnou rezervu a spád $h(u) - h(v)$ větší než 1.

Důkaz: Indukcí dle běhu algoritmu. Na začátku mají všechny hrany ze zdroje rezervu

nulovou a všechny ostatní vedou mezi vrcholy s výškou 0. V průběhu výpočtu by se tento invariant mohl dokázat pouze dvěma způsoby:

- Zvednutím vrcholu u , ze kterého vede hrana uv s kladnou rezervou a spádem 1. Tento případ nemůže nastat, neboť algoritmus by dal přednost převedení přebytku po této hraně před zvednutím.
- Zvětšením rezervy hrany se spádem větším než 1. Toto také nemůže nastat, neboť rezervu bychom mohli zvětšit jedině tak, že bychom poslali něco v protisměru – a to nesmíme, jelikož bychom převáděli přebytek z nižšího vrcholu do vyššího.

♡

Lemma K (o Korektnosti): Když se algoritmus zastaví, je f maximální tok.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že f je tok: Omezení na kapacity splňuje tok stejně jako vlna, takže postačí dokázat, že platí Kirchhoffův zákon. Ten požaduje, aby přebytky ve všech vrcholech kromě zdroje a spotřebiče byly nulové. To ovšem musí být, protože nenulový přebytek by musel být kladný a algoritmus by se dosud nezastavil.

Zbývá zdůvodnit, že f je maximální: Pro spor předpokládejme, že tomu tak není. Ze správnosti Fordova-Fulkersonova algoritmu plyne, že tehdy musí existovat nenasycená cesta ze zdroje do stoku. Uvažme libovolnou takovou cestu. Zdroj je stále ve výšce n a spotřebič ve výšce 0 (viz invariant A). Tato cesta tedy překonává spád n , ale může mít nejvýše $n - 1$ hran. Proto se v ní nachází alespoň jedna hrana se spádem alespoň 2. Jelikož je tato hrana součástí nenasycené cesty, musí být sama nenasycená, což je spor s invariantem S. Tok je tedy maximální.

♡

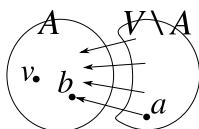
Lemma C (Cesta do zdroje): Mějme vrchol v , jehož přebytek $f^\Delta(v)$ je kladný. Pak existuje nenasycená cesta z tohoto vrcholu do zdroje.

Důkaz: Buď v vrchol s kladným přebytkem. Uvažme množinu $A := \{u \in V \mid \text{existuje nenasycená cesta z } v \text{ do } u\}$. Ukážeme, že tato množina obsahuje zdroj.

Použijeme už mírně okoukaný trik: sečteme přebytky ve všech vrcholech množiny A . Všechny hrany ležící celé uvnitř A nebo celé venku přispějí dohromady nulou. Nenulou mohou přispět pouze hrany vedoucí ven z A nebo naopak zvenku dovnitř. Získáme:

$$\sum_{u \in A} f^\Delta(u) = \underbrace{\sum_{ba \in E(V \setminus A, A)} f(ba)}_{=0} - \underbrace{\sum_{ab \in E(A, V \setminus A)} f(ab)}_{\geq 0} \leq 0.$$

Ukažme si, proč je první svorka rovna nule. Mějme hrana ab ($a \in A, b \in V \setminus A$). Ta musí mít nulovou rezervu – jinak by totiž i vrchol b patřil do A . Proto po hraně ba nemůže nic téci.



Obrázek k důkazu lemmatu C

Druhá svorka je evidentně nezáporná, protože je to součet nezáporných ohodnocení hran.

Proto $\sum_{u \in A} f^\Delta(u) \leq 0$. Zároveň však v A leží aspoň jeden vrchol s kladným přebytkem, totiž v , tudíž v A musí být také nějaký vrchol se záporným přebytkem – a jediný takový je zdroj. Tím je dokázáno, že z leží v A , tedy že vede nenasycená cesta z vrcholu v do zdroje. ♡

Invariant V (Výška): Pro každý vrchol v je $h(v) \leq 2n$.

Důkaz: Kdyby existoval vrchol v s výškou $h(v) > 2n$, mohl se do této výšky dostat pouze zvednutím z výšky alespoň $2n$. Tehdy musel mít kladný přebytek $f^\Delta(v) > 0$ (jinak by nemohl být zvednut). Dle lemmatu C musela existovat nenasycená cesta z v do zdroje. Tato cesta nicméně překonávala spád alespoň n , ale mohla mít nejvýše $n - 1$ hran (na cestách se vrcholy neopakují). Tudíž musela obsahovat nenasycenou hranu se spádem alespoň 2, což je spor s invariantem S. ♡

Lemma Z (počet Zvednutí): Během výpočtu nastane nejvýše $2n^2$ zvednutí.

Důkaz: Z předchozího invariantu plyne, že každý vrchol mohl být zvednut nejvýše $2n$ -krát. Vrcholů je n . ♡

Ted' nám ještě zbývá určit počet provedených převedení. Bude se nám hodit, když převedení rozdělíme na dva druhy:

Definice: Řekneme, že převedení po hraně uv je *nasycené*, pokud po převodu rezerva $r(uv)$ klesla na nulu. V opačném případě je *nenasycené*, a tehdy určité klesne přebytek $f^\Delta(u)$ na nulu (to se nicméně může stát i při nasyceném převedení).

Lemma S (naSycená převedení): Počet všech nasycených převedení je nejvýš nm .

Důkaz: Pro každou hranu uv spočítejme počet nasycených převedení (tedy takových převedení, že po nich klesne rezerva hrany na nulu). Abychom dvakrát nasycené převedli přebytek (nebo jeho část) z vrcholu u do vrcholu v , tak jsme museli u mezitím alespoň dvakrát zvednout:

Po prvním nasyceném převedení z vrcholu u do vrcholu v se vynulovala rezerva hrany uv . Uvědomme si, že při této operaci muselo být u výše než v , a dokonce víme, že bylo výše přesně o 1 (viz invariant S). Než nastane další převedení po této hraně, musíme její rezervu z nuly opět zvýšit. Jediný způsob, jak toho lze dosáhnout, je převést část přebytku z v zpátky do u . K tomu se musí v dostat (alespoň o 1) výše než u . Po přelití bude rezerva uv opět kladná. A abychom provedli nasycené převedení znovu ve směru z u do v , musíme zase u dostat (alespoň o 1) výše než v . Proto musíme u alespoň o 2 zvednout – nejprve na úroveň v a pak ještě o 1 výše.

Ukázali jsme tedy, že mezi každými dvěma nasycenými převedeními musel být vrchol u zvednut alespoň dvakrát. Podle lemmatu V se u mohlo zvedat maximálně $2n$ -krát za celý výpočet, takže všech nasycených převedení po hraně uv je nejvýše n a po všech hranách dohromady nejvýše nm . ♡

Potenciálová metoda: Předchozí dvě lemmata jsme dokazovali „lokálním“ způsobem – zvednutí jsme počítali pro každý vrchol zvlášť a nasycená převedení pro každou hranu. Tento přístup pro nenasycená převedení nefunguje, jelikož jich lokálně může být velmi mnoho. Podaří se nám nicméně omezit jejich celkový počet.

Jedím ze způsobů, jak taková „globální“ tvrzení o chování algoritmů dokazovat, je použít *potenciál*. To je nějaká *nezáporná* funkce, která popisuje stav výpočtu. Pro každou operaci pak stanovíme, jaký vliv má na hodnotu potenciálu. Z toho odvodíme, že operací, které potenciál snižují, nemůže být výrazně více než těch, které ho zvyšují. Jinak by totiž potenciál musel někdy během výpočtu klesnout pod nulu.

S tímto druhem důkazu jsme se vlastně už setkali. To když jsme v kapitole o vyhledávání v textu odhadovali počet průchodů po zpětných hranách. Roli potenciálu tam hrálo číslo stavu.

V následujícím lemmatu bude potenciál trochu složitější. Zvolíme ho tak, aby operace, jejichž počty už známe (zvednutí, nasycené převedení), přispívaly nanejvýš malými kladnými čísly, a nenasyčená převedení potenciál vždy snižovala.

Lemma N (Nenasycená převedení): Počet všech nenasyčených převedení je $\mathcal{O}(n^2m)$.
Důkaz: Důkaz provedeme potenciálovou metodou. Uvažujme následující potenciál:

$$\Phi := \sum_{\substack{v \neq z, s \\ f^{\Delta}(v) > 0}} h(v).$$

Nyní se podívejme, jak se náš potenciál během algoritmu vyvíjí:

- Na počátku je $\Phi = 0$.
- Během celého algoritmu je $\Phi \geq 0$, neboť potenciál je součtem nezáporných členů.
- Zvednutí vrcholu zvýší Φ o jedničku. (Aby byl vrchol zvednut, musel mít kladný přebytek, takže vrchol do sumy již přispíval. Teď jen přispěje číslem o 1 vyšším.) Již víme, že za celý průběh algoritmu je všech zvednutí maximálně $2n^2$, proto zvedáním vrcholů zvýšíme potenciál dohromady nejvýše o $2n^2$.
- Nasycené převedení zvýší Φ nejvýše o $2n$, protože buď po převodu hranou uv v u zůstal nějaký přebytek, takže se mohl potenciál zvýšit nejvýše o $h(v) \leq 2n$, nebo je přebytek v u po převodu nulový a potenciál se dokonce o jedna snížil. Podle lemmatu S nastane nejvýše nm takových nasycených převedení a ta celkově potenciál zvýší maximálně o $2n^2m$.
- Konečně když převádíme po hraně uv nenasyčeně, tak od potenciálu určitě odečteme výšku vrcholu u (neboť se vynuluje přebytek ve vrcholu u) a možná přičteme výšku vrcholu v . Jenže $h(v) = h(u) - 1$, a proto nenasyčené převedení potenciál vždy sníží alespoň o jedna.

Potenciál celkově stoupne o nejvýše $2n^2 + 2n^2m = \mathcal{O}(n^2m)$, klesá pouze při nenasyčených převedeních a pokaždé alespoň o 1. Proto je všech nenasyčených převedení $\mathcal{O}(n^2m)$. ♥

Implementace

Zbývá vyřešit, jak síť a výšky reprezentovat, abychom dokázali rychle hledat vrcholy s přebytkem a nenasyčené hrany vedoucí s kopce.

Budeme si pamatovat seznam P všech vrcholů s kladným přebytkem. Když měníme přebytek nějakého vrcholu, můžeme tento seznam v konstantním čase aktualizovat – buďto vrchol do seznamu přidat nebo ho naopak odebrat. (K tomu se hodí, aby si vrcholy pamatovaly ukazatel na svou polohu v seznamu P). V konstantním čase také umíme odpovědět, zda existuje nějaký vrchol s přebytkem.

Dále si pro každý vrchol $u \in V$ budeme udržovat seznam $L(u)$. Ten bude obsahovat všechny nenasycené hrany, které vedou z u dolů (mají spád alespoň 1). Opět při změnách rezerv můžeme tyto seznamy v konstantním čase upravit.

Jednotlivé operace budou mít tyto složitosti:

- *Inicializace* algoritmu – triviale $\mathcal{O}(m)$.
- *Výběr vrcholu* s kladným přebytkem a nalezení nenasycené hrany vedoucí dolů – $\mathcal{O}(1)$ (stačí se podívat na počátky příslušných seznamů).
- *Převedení přebytku* po hraně uv – změny rezerv $r(uv)$ a $r(vu)$ způsobí přepočítání seznamů $L(u)$ a $L(v)$, změny přebytků $f^\Delta(u)$ a $f^\Delta(v)$ mohou způsobit změnu v seznamu P . Vše v čase $\mathcal{O}(1)$.
- *Zvednutí vrcholu* u – musíme obejít všechny hrany do u a z u , kterých je nejvýše $2n$, porovnat výšky a případně tyto hrany uv odebrat ze seznamu $L(v)$ resp. přidat do $L(u)$. To trvá $\mathcal{O}(n)$.

Vidíme, že každé zvednutí je sice drahé, ale je jich zase poměrně málo. Naopak převádění přebytku je častá operace, takže je výhodné, že trvá konstantní čas.

Věta: Goldbergův algoritmus najde maximální tok v čase $\mathcal{O}(n^2m)$.

Důkaz: Inicializace algoritmu trvá $\mathcal{O}(m)$. Pak algoritmus provede nejvýše $2n^2$ zvednutí (viz lemma Z), nejvýše nm nasyacených převedení (lemma N) a nejvýše n^2m nenasycených převedení. Vynásobením složitostmi jednotlivých operací dostaneme čas $\mathcal{O}(n^3 + nm + n^2m) = \mathcal{O}(n^2m)$. Podle lemmatu K po zastavení vydá maximální tok. ♥

Vylepšení Goldbergova algoritmu

Základní verze Goldbergova algoritmu tedy dosáhla stejné složitosti jako Dinicův algoritmus. Nyní ukážeme, že pokud budeme volit vrchol, ze kterého budeme převádět přebytek, šikovněji – totiž jako nejvyšší z vrcholů s nenulovým přebytkem –, složitost se ještě zlepší.

V časové složitosti původního algoritmu byl nejvýznamnější člen $\mathcal{O}(n^2m)$ za nenasycená převedení. Pokusme se jejich počet ve vylepšeném algoritmu odhadnout těsněji.

Lemma N' (Nenasycená převedení): Goldbergův algoritmus s volbou nejvyššího vrcholu provede $\mathcal{O}(n^3)$ nenasycených převedení.

Důkaz: Dokazovat budeme opět pomocí potenciálové metody. Vrcholy rozdělíme do hladin podle výšky. Speciálně nás bude zajímat *nejvyšší hladina s přebytkem*:

$$H := \max\{h(v) \mid v \neq z, s \ \& \ f^\Delta(v) > 0\}.$$

Rozdělíme běh algoritmu na *fáze*. Každá fáze končí tím, že se H změní. Jak se může změnit? Buď se H zvýší, což znamená, že nějaký vrchol s přebytkem v nejvyšší hladině byl o 1 zvednut, nebo se H sníží. Už víme, že v průběhu výpočtu nastane $\mathcal{O}(n^2)$ zvednutí, což shora omezuje počet zvýšení H . Zároveň si můžeme uvědomit, že H je nezáporný potenciál a snižuje se i zvyšuje přesně o 1. Počet snížení bude proto omezen počtem zvýšení. Tím pádem nastane všeho všudy $\mathcal{O}(n^2)$ fází.

Během jedné fáze přitom provedeme nejvýše jedno nenasyčené převedení z každého vrcholu. Po každém nenasyčeném převedení po hraně uv se totiž vynuluje přebytek v u a aby se provedlo další nenasyčené převedení z vrcholu u , muselo by nejdříve být co převádět. Muselo by tedy do u něco přitéci. My ale víme, že převádíme pouze shora dolů a u je v nejvyšší hladině (to zajistí právě ono vylepšení algoritmu), tedy nejdříve by musel být nějaký jiný vrchol zvednut. Tím by se ale změnilo H a skončila by tato fáze.

Proto počet všech nenasyčených převedení během jedné fáze je nejvýše n . A již jsme dokázali, že fází je $\mathcal{O}(n^2)$. Tedy počet všech nenasyčených převedení je $\mathcal{O}(n^3)$. ♥

Tento odhad je hezký, ale stále není těsný a algoritmus se chová lépe. Dokažme si ještě jeden těsnější odhad na počet nenasyčených převedení.

Lemma N” (Nenasycená převedení): Počet nenasyčených převedení je $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$.

Poznámka: Tato časová složitost je výhodná například pro řídké grafy. Ty mají totiž poměrně malý počet hran.

Důkaz: Zavedme fáze stejně jako v důkazu předchozí verze lemmatu a rozdělme je na dva druhy: laciné a drahé podle toho, kolik se v nich provede nenasyčených převedení. Pro každý druh fází přitom odhadneme celkový počet převedení jiným způsobem.

Nechť k je nějaké kladné číslo, jehož hodnotu určíme později. *Laciné fáze* budou ty, během nichž se provede nejvýše k nenasyčených převedení. *Drahé fáze* budou ty ostatní, tedy takové, ve kterých se provede více jak k nenasyčených převedení.

Teď potřebujeme odhadnout, kolik nás budou stát oba typy fází. Začneme těmi jednoduššími – lacinými. Jejich počet shora odhadneme počtem všech fází, tedy $\mathcal{O}(n^2)$. Nenasycených převedení se během jedné laciné fáze provede nejvíce k . Během všech laciných fází dohromady jich proto bude $\mathcal{O}(n^2k)$.

Pro počet nenasyčených převedení v drahých fázích si zavedme nový potenciál:

$$\Psi := \sum_{\substack{v \neq z, s \\ f^\Delta(v) \neq 0}} p(v),$$

kde $p(v)$ je počet vrcholů u , které nejsou výše než v . Neboli:

$$p(v) = |\{u \in V \mid h(u) \leq h(v)\}|.$$

Tedy platí, že $p(v)$ je vždy nezáporné nikdy nepřesáhne počet všech vrcholů n . Proto Ψ bude také vždy nezáporné a nepřekročí n^2 . Rozmysleme si, jak bude potenciál ovlivňován operacemi algoritmu:

- *Inicializace*: Počáteční potenciál je nejvýše n^2 .
- *Zvednutí vrcholu v* : Hodnota $p(v)$ se zvýší nejvýše o n a všechna ostatní $p(w)$ se buďto nezmění, nebo klesnou o 1. Bez ohledu na přebytky vrcholů se tedy potenciál zvýší nejvýše o n .
- *Nasyčené převedení* po hraně uv : Hodnoty $p(\dots)$ se nezmění, ale mění se přebytky – vrcholu u se snižuje, vrcholu v zvyšuje. Z potenciálu proto může zmizet člen $p(u)$ a naopak přibýt $p(v)$. Potenciál Ψ tedy vzroste nejvýše o n .
- *Nenasycené převedení* po hraně uv : Hodnoty $p(\dots)$ se opět nemění. Přebytek v u se vynuluje, což sníží Ψ o $p(u)$. Přebytek v se naopak zvýší, takže pokud byl předtím nulový, Ψ se zvýší o $p(v)$. Celkově tedy Ψ klesne alespoň o $p(u) - p(v)$.

Teď využijeme toho, že pokud převádíme po hraně uv , má tato hrana spád 1. Výraz $p(u) - p(v)$ tedy udává počet vrcholů na hladině $h(u)$, což je nejvyšší hladina s přebytkem. Z předchozího důkazu víme, že těchto vrcholů je alespoň tolik, kolik je nenasycených převedení během dané fáze.

Z toho plyne, že nenasycená převedení provedená během drahých fází sníží potenciál alespoň o k . Ty v laciných fázích ho nesnižují tak výrazně, ale určitě ho nezvýší.

Potenciál Ψ se tedy může zvětšit pouze při operacích inicializace, zvednutí a nasyčeného převedení. Inicializace přispěje n^2 . Všech zvednutí se provede celkem $\mathcal{O}(n^2)$ a každé zvýší potenciál nejvýše o n . Nasyčených převedení se provede celkem $\mathcal{O}(nm)$ a každé zvýší potenciál taktéž nejvýše o n . Celkem se tedy Ψ zvýší nejvýše o

$$n^2 + n \cdot \mathcal{O}(n^2) + n \cdot \mathcal{O}(nm) = \mathcal{O}(n^3 + n^2m).$$

Teď využijeme toho, že Ψ je nezáporný potenciál, tedy když ho každé nenasycené převedení v drahé fázi sníží Ψ alespoň o k , může takových převedení nastat nejvýše $\mathcal{O}(n^3/k + n^2m/k)$. To nyní sečteme s odhadem pro laciné fáze a dostaneme, že všech nenasycených převedení proběhne

$$\mathcal{O}\left(n^2k + \frac{n^3}{k} + \frac{n^2m}{k}\right) = \mathcal{O}\left(n^2k + \frac{n^2m}{k}\right)$$

(vyžili jsme toho, že v souvislých grafech je $m \geq n$, a tedy $n^2m \geq n^3$).

Tento odhad ovšem platí pro libovolnou volbu k . Proto zvolíme takové k , aby byl co nejnižší. Jelikož první člen s rostoucím k roste a druhý klesá, asymptotické minimum nastane tam, kde se tyto členy vyrovnají, tedy když $n^2k = n^2m/k$.

Nastavíme tedy $k = \sqrt{m}$ a získáme kýžený odhad $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$. ♥

Cvičení

1. Rozeberte chování Goldbergova algoritmu na sítích s jednotkovými kapacitami. Bude rychlejší než ostatní algoritmy?

2. Navrhněte implementaci vylepšeného Goldbergova algoritmu se zvedáním nejvyššího vrcholu s přebytkem. Snažte se dosáhnout časové složitosti $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$.
3. Co by se stalo, kdybychom v inicializaci algoritmu umístili zdroj o 1 níže?