

Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2010-12-01

Grafy

Pár definic pro začátek:

- Graf je *k-regulární* (pro nějaké $k \in \mathbb{N}$), pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň k .
- *Doplňek* grafu G je graf \overline{G} , který vznikne z G prohozením hran s nehranami. Tedy $\overline{G} = (V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G))$.
- *Automorfismus* grafu je isomorfismus s ním samým. Každý graf má aspoň jeden automorfismus (totiž identitu) a může mít i další. Grafu, který má jen jeden, říkáme *strnulý* nebo *asymetrický*.
- Grafu říkáme *vrcholově transitivní*, pokud pro každé dva vrcholy u, v existuje automorfismus f takový, že $f(u) = v$. Podobně *hranově transitivní*, pokud pro každé dvě hrany $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ existuje automorfismus f takový, že $\{f(a), f(b)\} = \{c, d\}$.

Úkoly:

Skoro úplné grafy – skup (6 bodů)

Dokažte, že pro každé n jsou všechny $(n - 2)$ -regulární grafy na n vrcholech navzájem isomorfní.

Téměř různé stupně – stup (10 bodů)

Na cvičení jsme dokázali, že neexistuje netriviální graf, jehož všechny vrcholy by měly navzájem různé stupně. Co kdybychom povolili jednu dvojici stejného stupně?

Sám sobě doplňkem – selfc (12 bodů)

Najděte nekonečně mnoho grafů G , které jsou isomorfní se svým doplňkem.

Strnulec – strn (10 bodů)

Sestrojte strnulý graf, který má alespoň 2 vrcholy, a dokažte to o něm.

Není malých strnulců – mstr (6 bodů)

Dokažte, že neexistují žádné strulé grafy na 2 až 5 vrcholech.

Graf bez cestičky – nop2 (4 body)

Popište všechny grafy, které neobsahují jako podgraf cestu P_2 . Dostatečně zdůvodněte, proč jiné nemohou existovat.

Graf bez cesty – nop3 (6 bodů)

Popište všechny grafy, které neobsahují jako podgraf cestu P_3 . Dostatečně zdůvodněte, proč jiné nemohou existovat.

Transitivní grafy – trang (9 bodů)

Triviálními příklady vrcholově transitivních grafů jsou grafy bez hran, úplné grafy a kružnice. Najděte alespoň jeden další (souvislý).

Která transitivita je silnější? – trans (13 bodů)

Je pravda, že každý vrcholově transitivní graf je také hranově transitivní? A opačně?