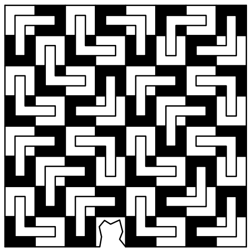
Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2010-10-20

Relace

Pokrytí šachovnice – `elka` *(5 bodů)*

Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno políčko chybí. Dokažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru „L“, které zabírají 3 políčka. Třeba takto:



Krájíme rovinu – `cutp` *(5 bodů)*

Dokažte, že n přímek může rovinu rozdělit nejvýše na $1 + n(n+1)/2$ částí.

Krájíme prostor – `cuts` *(8 bodů)*

Jak dopadne dělení trojrozměrného prostoru rovinami?

Celočíselnost – `xpox` *(12 bodů)*

Je dáno reálné číslo x takové, že $x + (1/x)$ je celé číslo. Dokažte, že pro každé přirozené n je celočíselné i $x^n + (1/x)^n$.

Skládání relací nekomutuje – `rnonc` *(4 body)*

Najděte relace R, S (na libovolné množině) takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Mocniny relace – `rexpf` *(7 bodů)*

Buď R relace na nějaké množině A. Definujeme mocninu relace R^n takto: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Dokažte, že pokud je A konečná množina, pak existuje $0 < i < j$ takové, že $R^i = R^j$.

Mocniny do nekonečna – `rexpi` *(7 bodů)*

Najděte relaci R na nějaké nekonečné množině takovou, že všechny relace R^n pro $n > 0$ jsou navzájem různé.

Nultá mocnina relace – `rexpz` *(4 body)*

Jak byste nadefinovali R^0, aby platilo $R^{n+1} = R^n \circ R$ is pro $n = 0$?