Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2010-10-06

Hříčky

Falešná mince – `mince` *(5 bodů)*

Máme M mincí, z nichž jedna je falešná a lehčí než ostatní. Dokažte, že na $\lceil \log_3 M \rceil$ vážení na rovnoramenných vahách je možné zjistit, která, a že tolik vážení je potřeba.

12 mincí – `12m` *(10 bodů)*

Máme 12 mincí, z nichž jedna je falešná, což se tentokrát pozná tak, že je buď lehčí nebo těžší než ostatní. Ukažte, jak na 3 vážení na rovnoramenných vahách zjistit, která to je a jestli je lehčí nebo těžší než ostatní.

13 mincí – `13m` *(5 bodů)*

Ukažte, že s 13 mincemi to už nejde, leda že bychom slevili z požadavku zjistit, jestli je falešná mince lehčí nebo těžší než ostatní.

Lichá čokoláda – `coko` *(20 bodů)*

Vymyslete strategii pro hru s lámáním čokolády s oběma hranami lichými. Nápověda: Zkuste hru převést na odebírání zápalek.

Součet třetích mocnin – `cube` *(10 bodů)*

Vymyslete vzorec pro součet $c_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Návod: uhodněte, že se jedná o polynom 4. stupně, dopočítejte podle $c_0, \ldots, c_4$ jeho koeficienty a pak dokažte indukcí, že vzorec platí pro všechna n.

10 pytlů – `sack` *(5 bodů)*

Dostali jste 10 pytlů plných třpytivých zlaťáků. Jen bohužel také víte, že v jednom pytli jsou všechny zlaťáky falešné. Z dřívějška si pamatujete, že pravá mince váží 1 g, zatímco falešná z kočičího zlata pouze 0.9 g. Jak na jedno zvážení na digitálních vahách (ukazují hmotnost s přesností na miligram) zjistit, který pytel je plný falešných mincí?

Jiných 10 pytlů – `sacks` *(2 body)*

Jako v minulé úloze, ale falešné mince mohou být v libovolně mnoha pytlích.

MIU systém – `miu` *(8 bodů)*

Hra s řetězci, vlastně velice podobná hře na důkazové systémy, kterou rádi hrávají matematici. Na začátku máme řetězec `MI` a upravujeme ho pomocí následujících pravidel:

- Pokud řetězec končí na `I`, můžete na jeho konec připsat `U`.
- Pokud řetězec začíná na `M`, můžete jeho zbytek napsat ještě jednou na konec.
- Obsahuje-li řetězec kdekoliv `III` (těsně za sebou), můžete tuto trojici znaků nahradit znakem `U`.
- Vyskytne-li se podřetězec `UU`, můžete ho smazat.

Přijďte na to, jak postupným aplikováním pravidel dojít k řetězci `MU`, nebo dokažte, že to nejde.

Kačenka – `duck` *(7 bodů)*

V rybníčku kruhového tvaru plave kačenka. Ráda by odletěla pryč. Protože má poraněnou plovací blánu, nemůže z hladiny jezera vzlétnout – musí nejprve doplavat na břeh. Tam na ni ale číhá kočka, která se bojí vody, ale po okraji rybníka se pohybuje čtyřikrát větší rychlostí než kačenka plave. Existuje způsob, jak může kačenka kočce upláchnout, ať se kočka pohybuje jakkoliv chytře? Například pokud by se rozhodla hned plavat na druhý konec jezírka než stojí kočka, utéct by nedokázala.