

Příklady z Diskrétní matematiky 2010-11-24

Náhodné proměnné

Rozptyl rovnoměrného rozdělení

Spočítejte rozptyl rovnoměrně rozdělené náhodné proměnné na množině $\{1, \dots, n\}$?

Na představení

Do jednoho divadla si na představení zašlo n pánů a každý z nich nechal v šatně klobouk. Po skončení představení však roztržitá šatnářka vracela pánům klobouky zcela náhodně (všechny možné permutace klobouků jsou stejně pravděpodobné). Jaká je střední hodnota počtu pánů, kteří dostali zpátky svůj klobouk?

Na honu

Na palouku panáčkuje n zajíců. Najednou se připlíží n myslivců, každý z nich zamíří na jednoho náhodně vybraného zajíce a vystřelí. Jaká je střední hodnota počtu přeživších zajíců?

Nerovnost mezi průměry

Definujme k -tý mocniný průměr čísel $a_1, \dots, a_n > 0$ takto:

$$A_k(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n}}.$$

Přitom:

- A_1 je aritmetický průměr,
- A_2 kvadratický průměr,
- A_{-1} je harmonický průměr (převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot; tak se třeba průměrují rychlosti),
- Pro $k \rightarrow \infty$ konverguje A_k k maximum všech a_i .
- Pro $k \rightarrow -\infty$ naopak k minimum.
- Pro $k \rightarrow 0$ konverguje ke geometrickému průměru $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Známa nerovnost mezi průměry říká, že kdykoliv je $k < \ell$, tak $A_k(a_1, \dots, a_n) \leq A_\ell(a_1, \dots, a_n)$, přičemž rovnost nastane pouze tehdy, jsou-li všechna a_i stejná.

Dokažte, že z toho, že pro libovolnou náhodnou veličinu X je $\text{var } X \geq 0$, plyne $A_1 \leq A_2$.