Příklady z Diskrétní matematiky 2010-10-20

Množiny

Pluska a minuska

Označme S_n množinu celých čísel, která lze zapsat ve tvaru $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \ldots \pm n$ (kde každé $\pm$ nahradíme znaménkem $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních). Co tato množina obsahuje?

3 operace

Určete maximální počet různých množin, které lze získat ze dvou zadaných množin operacemi průniku, sjednocení a množinového rozdílu.

Stejné potence

Dokažte, že pokud se potence dvou množin rovnají, pak se rovnají i množiny samy. Tedy že $2^A = 2^B \Rightarrow A = B$ pro libovolné množiny A, B.

Skládání relací

Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R:

a) relaci rovnosti na množině $\mathbb{N}$,
b) relaci $\leq$ na $\mathbb{N}$,
c) relaci $<$ na $\mathbb{N}$,
d) relaci $<$ na $\mathbb{R}$.

Něco navíc:

Egyptské zlomky

Obyvatelé staroegyptské říše zapisovali zlomky jako součty tzv. kmenových zlomků ve tvaru $1/n$, například $3/5 = 1/2 + 1/10$. Dokažte, že každý zlomek z intervalu $(0, 1)$ lze takto vyjádřit. Nápověda: rozklad zlomku m/n bude začínat zlomkem $1/\lceil n/m \rceil$.

Skládání funkcí

a) Jsou-li f, g prosté funkce, je $f \circ g$ také prostá?
b) Jsou-li f a g funkce na, je $f \circ g$ také na?
c) Je-li f prostá a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také prostá?
d) Je-li f na a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také na?
e) Je-li $f \circ g$ prostá, musí být f nebo g prostá?
f) Je-li $f \circ g$ na, musí být f nebo g na?