

Komplexní čísla: Složkový tvar

Definice: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Sčítání: $(a + bi) \pm (p + qi) = (a \pm p) + (b \pm q)i$.

Násobení: $(a + bi) \cdot (p + qi) = ap + (aq + bp)i + bqi^2 = (ap - bq) + (aq + bp)i$.

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$.

Komplexní sdružení: $\overline{a + bi} = a - bi$.

$\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x \pm y} = \overline{x} \pm \overline{y}$, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, $x \cdot \overline{x} \in \mathbb{R}$.

Absolutní hodnota: $|x| = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$, takže $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Také $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$.

Dělení: $x/y = (x \cdot \overline{y}) / (y \cdot \overline{y})$.

Komplexní čísla: Gaußova rovina a goniometrický tvar

Komplexním číslům přiřadíme body v \mathbb{R}^2 : $a + bi \leftrightarrow (a, b)$.

$|x|$ je vzdálenost od bodu $(0, 0)$.

$|x| = 1$ pro čísla ležící na jednotkové kružnici (*komplexní jednotky*).

Pak platí $x = \cos \varphi + i \sin \varphi$ pro nějaké $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Pro libovolné $x \in \mathbb{C}$: $x = |x| \cdot (\cos \varphi(x) + i \sin \varphi(x))$.

Číslu $\varphi(x) \in [0, 2\pi)$ říkáme *argument* čísla x , někdy značíme $\arg x$.

Navíc $\varphi(\bar{x}) = -\varphi(x)$.

Komplexní čísla: Exponenciální tvar

Eulerova formule: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Každé $x \in \mathbb{C}$ lze tedy zapsat jako $|x| \cdot e^{i\cdot\varphi(x)}$.

Násobení: $xy = (|x| \cdot e^{i\cdot\varphi(x)}) \cdot (|y| \cdot e^{i\cdot\varphi(y)}) = |x| \cdot |y| \cdot e^{i\cdot(\varphi(x)+\varphi(y))}$.

(absolutní hodnoty se násobí, argumenty sčítají)

Umocňování: $x^\alpha = (|x| \cdot e^{i\cdot\varphi(x)})^\alpha = |x|^\alpha \cdot e^{i\alpha\varphi(x)}$.

Odmocňování: $\sqrt[n]{x} = |x|^{1/n} \cdot e^{i\cdot\varphi(x)/n}$.

... pozor, odmocnina není jednoznačná: $1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$.

Komplexní čísla: Odmocniny z jedničky

Je-li nějaké $x \in \mathbb{C}$ n -tou odmocninou z jedničky, musí platit:

$$|x| = 1, \text{ takže } x = e^{i\varphi} \text{ pro nějaké } \varphi,$$

$$e^{i\varphi n} = \cos \varphi n + i \sin \varphi n = 1, \text{ pročež } \varphi n = 2k\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}.$$

Z toho plyne: $\varphi = 2k\pi/n$

(pro $k = 0, \dots, n - 1$ dostáváme různé n -té odmocniny).

Obecné odmocňování: $\sqrt[n]{x} = |x|^{1/n} \cdot e^{i\varphi(x)/n} \cdot u$, kde $u = \sqrt[n]{1}$.