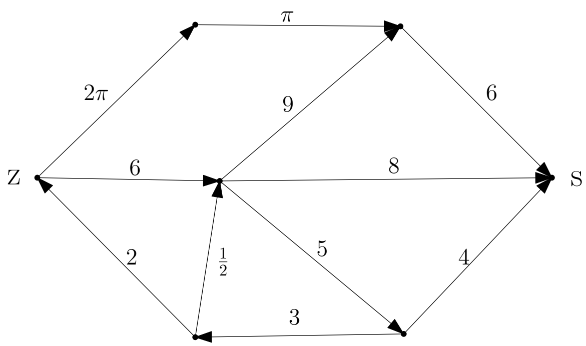
2. Toky v sítích *(přednášel T. Valla, zapsali K. Vandas a J. Machálek)*

Motivační úlohy:

- Mějme orientovaný graf se speciálními vrcholy Želivka a Kanál představující pražské vodovody. V tomto grafu budou vrcholy vodovodními stanicemi a hrany trubkami mezi nimi. Kolik vody proteče ze Želivky do Kanálu?
- Mějme orientovaný graf představující železniční síť; graf má význačné vrcholy Moskva a Fronta, každá hrana grafu má kapacitu, kterou může uvézt. Kolik vojáků je schopna síť převézt z Moskvy a spotřebovat na Frontě?

Definice: *Síť* je uspořádaná čtveřice $(\vec{G}, z, s, c)$, kde $\vec{G}$ je orientovaný graf, z a s jsou jeho vrcholy (z(droj) a s(tok)) a c je kapacita sítě, kterou představuje funkce $c : E(\vec{G}) \to R_0^+$.

Intuice: Toky v sítích představují rozvržení, jakým suroviny sítí potečou…



Příklad sítě. Čísla představují kapacity jednotlivých hran.

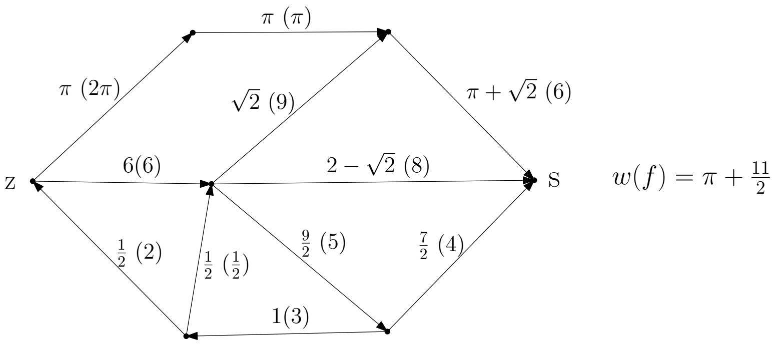
Definice: *Tok* je funkce $E(\vec{G}) \to R$ taková, že

1. Tok každé hrany je omezen její kapacitou: $0 \leq f(e) \leq c(e)$
2. „Kirchhoffův zákon“ - nikde se neztrácejí suroviny:

$$\sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = \sum_{(u,x)\in E} f(u,x) \quad \forall u \in V(\vec{G}), u \neq z, u \neq s$$

Poznámka: Pokud bychom se chtěli v definici toku u bodu 2 vyhnout podmínkám pro z a s, můžeme zdroj a stok vzájemně propojit (pak jde o tzv. cirkulaci).

Poznámka: V angličtině se obvykle zdroj značí „s“ a stok „t“ (zkratky source a sink, ovšem dvě stejná písmena by byla poněkud nepraktická…)



Příklad toku. Čísla představují ohodnocení funkcí toku (v závorkách jsou kapacity hran).

Definice: *Velikost toku* f je:

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z)$$

Věta: Pro každou síť existuje maximální tok (bez důkazu).

Idea důkazu: Dokáže se pomocí metod matematické analýzy s tím, že množina toků je kompaktní a funkce toků je spojitá...

Intuice. Řez grafu je množina hran oddělující z(droj) a s(tok).

Definice: *Řez* R v síti $(\vec{G}, z, s, c)$ je $R \subseteq E(\vec{G})$ taková, že $\nexists$ cesta ze z do s v grafu $(V(\vec{G}), E(\vec{G}) \setminus R)$.

Definice: *Kapacita řezu* $c(R) = \sum_{(u,v\in R)} c(u,v)$.

Věta (Hlavní věta o tocích, Ford-Fulkerson): Mějme S síť.

$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R)$$

Intuice: Uvážíme-li množinu kapacit všech řezů, je zdola omezená množinou hodnot toků.

Idea důkazu: Důkaz provedeme pomocí dokázání dvou neostrých nerovností.

Důkaz:

Pomocné značení: Zaveďme konvenci, že existují-li orientované hrany (u,v), $u \in A$, $v \in B$, značíme je S(A,B) (separátor). $f(A,B) = \sum_{(u,v)\in E, u\in A, v\in B} f(u,v)$.

Lemma: $A \subseteq V(\vec{G}), z \in A, s \notin A, f$ je tok. Potom platí, že

$$w(f) = f(A, V \setminus\ A) - f(V \setminus\ A, A)$$

Důkaz: Důkaz provedeme pomocí „Kirchhoffova zákonu“ a definice velikosti toku:

$$\sum_{(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = 0 \quad \forall u \in A, u \neq z, u \neq s$$

$$\sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z) = w(f)$$

Rovnice sečteme:

$$\sum_{u\in A} \left(\sum_{(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{(x,u)\in E} f(x,u) \right) = w(f)$$

Poznámka: Tato rovnice neznamená nic jiného, než že se hrany vedoucí z A do A jednou přičtou a jednou odečtou. Projeví se pouze hrany vedoucí dovnitř a ven z $V \setminus A$, takže toky vnitřních hran A se „požerou“.

Z toho plyne:

$$f(A, V\setminus A) - f(V\setminus A, A) = \sum_{u\in A, v\notin A} f(u,v) - \sum_{u\notin A, v\in A} f(u,v) = w(f)$$

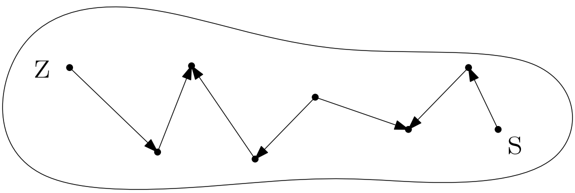
♡

Důsledek: Pokud f je tok, R je řez, pak platí: $w(f) \leq c(R)$.

Důkaz: $w(f) = f(A, V\setminus A) - f(V\setminus A, A) \leq f(A, V\setminus A) \leq c(A, V\setminus A) \leq c(R)$

♡

Redefinice: *Cesta* je odteď posloupnost navazujících hran, u kterých ignorujeme orientaci. Tyto cesty se obvykle nazývají „zs-cesty“.



Příklad zs-cesty.

Definice: *Cesta* P ze z do s je *nasycená*, pokud

$$\exists\ e \in P \begin{cases} f(e) = c(e) \ldots \text{orientovaná po směru} \\ f(e) = 0 \ldots \text{orientovaná proti směru} \end{cases}$$

Jinak je cesta nenasycená.

Definice: *Tok* je *nasycený*, pokud $\forall$ cesta P je nasycená.

Věta: Tok f je nasycený $\Leftrightarrow$ f je maximální. Navíc pro $\forall$ maximální tok f $\exists$ řez R, že $w(f) = c(R)$.

Důkaz:

„$\Leftarrow$“ sporem: Mějme tok f maximální a nenasycený $\Rightarrow \exists$ P nenasycená. Tuto cestu P budeme „vylepšovat“. Zvolíme:

$$\varepsilon_1 = \min_{e \in P,\ \text{po směru}} \{c(e) - f(e)\}$$

$$\varepsilon_2 = \min_{e \in P,\ \text{proti směru}} \{f(e)\}$$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$$

Poslední ostrá nerovnost vyplývá z definice nenasycené cesty. Nyní vylepšíme tok f o ε: $f \to f^{'}$:

$$f^{'}(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon \ldots e \in P \text{ po směru} \\ f(e) - \varepsilon \ldots e \in P \text{ proti směru} \\ f(e) \ldots e \notin P \end{cases}$$

Nyní je potřeba ověřit, že $f^{'}$ je skutečně tok:

$$0 \leq f^{'}(e) \leq c(e) \ldots \text{platí stále díky volbě } \varepsilon$$

Platnost „Kirchhoffova zákonu“ ověříme rozborem případů:

$$\xrightarrow[+\varepsilon]{\qquad} \bullet \xrightarrow[+\varepsilon]{\qquad} \qquad \varepsilon - \varepsilon = 0$$

$$\xrightarrow[+\varepsilon]{\qquad} \bullet \xleftarrow[-\varepsilon]{\qquad} \qquad \varepsilon + (-\varepsilon) = 0$$

$$\xleftarrow[-\varepsilon]{\qquad} \bullet \xleftarrow[-\varepsilon]{\qquad} \qquad -(-\varepsilon) - \varepsilon = 0$$

$$\xleftarrow[-\varepsilon]{\qquad} \bullet \xrightarrow[+\varepsilon]{\qquad} \qquad -(-\varepsilon) - \varepsilon = 0$$

Rozbor případů.

$f^{'}$ je tedy tok, ovšem potom platí:

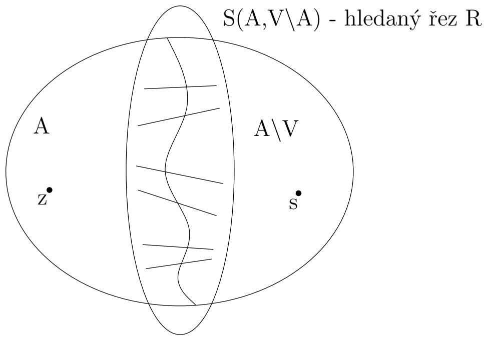
$$w(f^{'}) = w(f) + \varepsilon \Rightarrow w(f^{'}) > w(f) \Rightarrow \text{SPOR}$$

„$\Rightarrow$“: Uvážíme $A \subseteq V(\vec{G})$, že $\forall\ v \in A\ \exists$ nenasycená cesta ze z do v. $z \in A$, $s \notin A$. $S(A, V \setminus A)$ je hledaný řez R. Podle lemmatu:

$$w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = c(A, V \setminus A) = c(R)$$

Víme, že $w(f) \leq c(R)$. Stačilo uvážit nasycený tok f. Pak jsme sestrojili řez R a výraz přešel v rovnost $c(R) = w(f)$ (a tedy je tok f maximální).

♡



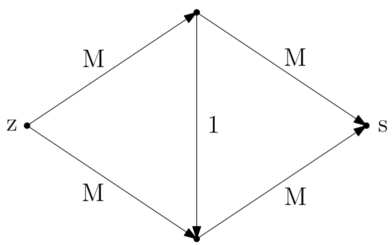
Rozdělení V($\overrightarrow{G}$) na množinu A a V\A v důkazu hlavní věty o tocích.

Algoritmus: (Ford-Fulkerson algoritmus hledání maximálního toku)

1. $f(e) := 0 \ \forall e \in E$
2. while $\exists$ zlepšující cesta P, vylepši P jako v důkazu hlavní věty
3. f je maximální

Cvičení:

- Je pro přirozené kapacity F.F. algoritmus konečný? Ano - v každém zlepšujícím kroku algoritmu se celkový tok zvětší aspoň o 1. Protože máme horní odhad na maximální tok (např. součet kapacit všech hran), máme i horní odhad na dobu běhu algoritmu.
- Je F.F. algoritmus konečný pro racionální kapacity hran? Ano - všechny kapacity vynásobíme společným jmenovatelem a převedeme na předchozí případ (pro obecné kapacity ovšem takto definovaný F.F. algoritmus nemusí být konečný).
- Kolik kroků bude muset algoritmus na následující síti maximálně udělat, aby úspěšně doběhl? (2M kroků)



Příklad sítě. Kolik kroků musí maximálně udělat F.F. algoritmus?